Paper im Rahmen des Tractatus Principio |

—

Die Riemannhypothese entschlüsselt

Mit den Augen des Tractatus Principio

von

C. H. F. Warnke

The Future Foundation

DOI: 10.5281/zenodo.23934428

Vorwort

Diese Abhandlung nähert sich der Riemannfrage aus den Grundlagen des Tractatus Principio heraus. Ihr Ausgangspunkt ist der Unterschied, durch den seine Pole überhaupt erst bestimmbar werden. Delta bezeichnet den wirksamen Selbstbezug dieses Unterschiedes, während die Zahl als stabilisierte Lesung des so entstehenden relationalen Zusammenhangs verstanden wird.

Im Zentrum steht die Überlegung, dass die multiplikative Fragestellung zunächst eine Relation entfaltet, deren Ordnung sie anschließend selbst untersucht. Zwei Begriffe bedürfen dafür einer kurzen Einordnung: „Takt“ – im Englischen als „Tact“ aus dem Deutschen übernommen – bezeichnet den geordneten Vollzug eines Übergangs. Mit „Band“ ist hingegen der gemeinsame relationale Vollzug gemeint, wie er durch die dezimalen Zeichen von null bis neun lesbar wird.

Die hier vertretene These ist an eine Voraussetzung gebunden. Erkennt man den Unterschied als Grundlage an, so löst sich die Riemannfrage innerhalb des Selbstbezugs auf, den sie bereits mit ihrer eigenen Formulierung vollzieht. Von einer „Auflösung“ spreche ich insofern, als die Frage nach einer vermeintlich unabhängig gegebenen und unerklärten Zahlenordnung auf jene Relation zurückgeführt wird, aus der diese Ordnung hervorgeht. Das ist die Auflösung, für die innerhalb des Tractatus argumentiert wird. Sie wird nicht als konventioneller mathematischer Beweis der Aussage vorgelegt, dass sämtliche nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion auf der kritischen Geraden liegen.

Zusammenfassung

Die vorliegende Abhandlung entwickelt eine Auflösung der Riemannfrage auf Grundlage des Tractatus Principio. Ausgangspunkt ist der Unterschied, der seine Pole bestimmt und in Delta seinen wirksamen Selbstbezug findet. Zahlen sind demnach stabilisierte Lesungen dieses Vollzugs. Die multiplikative Frage entfaltet dabei eine Relation, deren Ordnung sie anschließend selbst zum Gegenstand ihrer Untersuchung macht. Zum scheinbar äußeren Rätsel wird diese Ordnung erst, wenn ihr erzeugender Zusammenhang aus der Betrachtung verschwindet. Das Beweisprinzip liegt im Selbstbezug: Auch jede weitere Operation, einschließlich einer denkbaren Gegenoperation, muss unterscheiden, um überhaupt als solche bestimmbar zu sein. Unter dieser Voraussetzung kehrt die Fragestellung durch eine andere Ergebnislesung zu demselben Vollzug zurück. Die zentrale These lautet folglich, dass sich die Forderung nach einem unabhängigen Ursprung der Zahlenordnung auflöst, sobald dieser Zusammenhang erkannt und in die Erklärung zurückgeführt wird.

Schlüsselwörter: Riemannhypothese; Tractatus Principio; Unterschied; Delta; Selbstbezug; Primzahlen; Schnittinvarianz.

Inhalt

- 1. Mit einem Unterschied beginnen

- 2. Kreis, Schnitt und Spiegelung

- 3. Delta: den Unterschied unterscheiden

- 4. Wie ein Operator die Frage festlegt

- 5. Wiederholtes Fragen und unendlicher Regress

- 6. Neun als dezimale Bruchkante

- 7. Wachstum durch wechselnde Polrollen

- 8. Die multiplikative Frage und Primalität

- 9. Quersumme: eine andere Frage an eine Inschrift

- 10. Der Kreis, gelesen durch dezimale Gradbezeichnungen

- 11. Was die Zetafunktion tut

- 12. Nullstellen und ihre Anordnung lesen

- 13. Der Erklärungszirkel und seine Auflösung

- Schluss

- Literatur und Leseanker

Einleitung

Die Riemannhypothese, erstmals 1859 formuliert, stellt die Frage, ob sämtliche nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion einen Realteil von ein Halb besitzen [8, H1]. Bevor wir uns allerdings der Position dieser Nullstellen widmen, scheint mir eine grundlegendere Fragestellung angebracht: Wie werden die Zahl, die Operation und die Null innerhalb einer solchen Untersuchung überhaupt zu bestimmbaren Größen?

Seit mehr als 160 Jahren beschäftigen sich Mathematiker mit dieser Frage und haben dabei ein immer umfangreicheres theoretisches Instrumentarium entwickelt. Spektrale Operatoransätze greifen etwa die Hilbert–Pólya-Idee auf, Nullstellen mit Eigenwerten in Verbindung zu bringen. Montgomerys 1973 veröffentlichte Untersuchungen zur Paarkorrelation und ihre Verbindung zu Dysons Zufallsmatrixstatistik eröffneten einen weiteren Zugang [H2, H3]. Berry und Keating entwickelten 1999 quantenmechanische und semiklassische Analogien, darunter den Vorschlag einer dynamischen Interpretation der Nullstellen [H3]. All dies sind bedeutende Stationen einer fortwährenden mathematischen Erkundung. Die Riemannhypothese selbst bleibt indessen im konventionellen Sinne ungelöst [H1].

Aus der Perspektive des Tractatus Principio drängt sich angesichts dieser Entwicklung ein Verdacht auf. Wenn eine Fragestellung über Generationen hinweg immer komplexere theoretische Konstruktionen hervorbringt, während ihre ursprüngliche Relation ungeklärt bleibt, so mag es sein, dass wir einem Turm Stockwerk um Stockwerk hinzufügen, ohne sein Fundament überhaupt betrachtet zu haben. Der hier untersuchte Erklärungsfehler ist dabei recht eigentümlich: Eine Ordnung, die erst durch die Regeln unserer Frage lesbar wird, soll uns anschließend ihren von eben diesen Regeln unabhängigen Ursprung offenbaren.

Um diesen Gedanken nachvollziehbar zu entwickeln, widmen sich die Abschnitte 1 bis 4 zunächst dem Unterschied, seiner Kreisgeometrie, dem Selbstbezug und den Perspektiven mathematischer Operatoren. Die Abschnitte 5 bis 10 führen diese Überlegungen durch verschiedene numerische

Lesungen. In Abschnitt 11 betrachten wir die Zetafunktion selbst, bevor Abschnitt 12 ihre Nullstellen und die kritische Gerade aufgreift. Abschnitt 13 und der Schluss führen die Überlegungen schließlich zum Erklärungszirkel und zur Diagnose des Tractatus zurück.

Die Voraussetzung dieser Betrachtung sowie die hier gemeinte Bedeutung einer „Auflösung“ sind bereits im Vorwort bestimmt. Die folgenden Ausführungen sollen den Weg des Arguments zugänglich machen, ohne dass hierfür zunächst der gesamte erste Band des Tractatus gelesen werden müsste.

1. Mit einem Unterschied beginnen

Die Frage, wo ein bestimmtes numerisches Ergebnis zu finden ist, setzt bereits etwas voraus, das wir im gewöhnlichen Umgang mit Zahlen kaum noch beachten: dass überhaupt etwas als ein bestimmtes Ergebnis erkennbar wird. Band I des Tractatus beginnt deshalb mit einer grundlegenden Abhängigkeit. Ein Etwas kann nur dann als dieses und nicht als jenes erkannt werden, wenn ein Unterschied vorliegt. Das gilt für ein Zahlzeichen ebenso wie für ein Axiom oder die mathematische Fragestellung selbst [1, Kapitel V].

Stellen wir uns eine Grenze vor, deren Seiten wir A und B nennen. Gewöhnlich würden wir wohl davon ausgehen, dass zunächst zwei Dinge vorhanden sind, zwischen denen wir anschließend eine Relation herstellen. Der Tractatus kehrt diese Betrachtung um. Erst durch die Unterscheidung werden die Seiten überhaupt als A und B bestimmbar.

$$A|B$$

Der Strich bezeichnet hier die unterscheidende Relation. A und B sind ihre Pole, sprich jene Seiten, die erst durch diese Relation als unterschiedliche Stellungen lesbar werden. Ohne den Unterschied verlören sie ihre Bestimmung als eben diese beiden Seiten. Die Relation hat demnach in unserer Erklärung Vorrang vor den Polen, die sie unterscheidet [1, Kapitel V].

Die Null bezeichnet das Potenzial des Unterschieds, solange noch keine bestimmte Lesung vorgenommen wurde. Die Eins hingegen ist dessen erste Bestimmung. Ihr Zusammenhang lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$0|1$$

Mit der Eins ist die Null bereits in die Relation einbezogen. Die Eins erhält ihre Bestimmung in diesem Bezug, während die Null wiederum durch ihr bestimmtes Gegenüber lesbar wird. Beide bedingen einander. Schreiben wir lediglich 1, so lassen wir diese Verbindung zwar unausgesprochen, heben sie jedoch keineswegs auf [1, Kapitel VI]. Gleiches gilt für jede weitere Zahl: Mit jeder erneuten Bestimmung wiederholt sich der unterscheidende Vollzug. Die Zahl der Bestimmungen nimmt zu, der gemeinsame Nullbezug bleibt hingegen erhalten.

Hier begegnen wir bereits dem Verdinglichungsfehler. Behandeln wir die sichtbare 1 als ein eigenständiges Ding und vergessen darüber die Relation, durch die sie überhaupt Eins bedeutet, so vertauschen wir den Ausgangspunkt mit seinem Ergebnis. Das Zeichen erscheint plötzlich als Ursprung jener Beziehung, der es seine Lesbarkeit verdankt.

Dieser Fehler ist keineswegs auf die Eins beschränkt. Er kann uns ebenso bei größeren Zahlen, Primzahlen oder ganzen Funktionen begegnen. Wir fragen dann nach den Relationen eines vermeintlich schon unabhängig bestehenden Objektes, statt zunächst die unterscheidende Relation zu untersuchen, aus der seine Bestimmung hervorgeht.

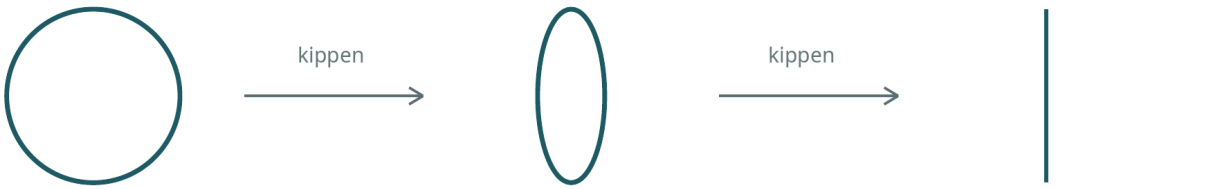
Eine solche bestimmte Darstellung bezeichne ich im Folgenden als Ergebnislesung. Das Zahlzeichen ist eine mögliche Ergebnislesung einer Relation. Der Begriff soll uns daran erinnern, dass wir einen Ausdruck aus einem relationalen Zusammenhang lesen und dass dieser Zusammenhang auch dann beteiligt bleibt, wenn wir nur noch das fertige Zeichen vor Augen haben.

Damit ist der Ausgangspunkt für unsere geometrische Betrachtung gegeben: Der Unterschied bestimmt seine Pole; die Null bezeichnet sein Potenzial; und die Eins bewahrt ihren Bezug zur Null. Kreis und Strich werden uns diese Beziehung nun auch geometrisch vor Augen führen.

2. Kreis, Schnitt und Spiegelung

Betrachten wir Abbildung 1. Im Teil A steht der Kreis für die Null, also das geschlossene Potenzial der Relation in ihrer Gesamtheit. Kippen wir denselben Kreis in unserer Perspektive zur Seite, erscheint er zunächst als schmale Ellipse und in der Kantenansicht schließlich als Linie. Diese Linie ist die Eins, der unterscheidende Strich. Es handelt sich demnach nicht um verschiedene Gegenstände, sondern um eine geometrische Lesung desselben Prinzips: Jede Bestimmung behält den Nullbezug bei, durch den sie lesbar wird.

A. Eine Beziehung, als Kreis und als Linie gelesen



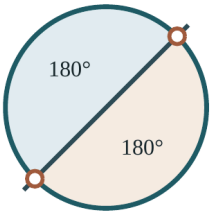
0: geschlossene Möglichkeit — **derselbe Kreis** — **1: die Linie / der Unterschied**

Die Null bleibt mitgelesen.

B. Zwei Schnitte des Kreises, zwei Hälften

Kreis: 0

ein gemeinsamer Nullbezug



2: zwei Schnitte

am Umfang

2 = 01 01: zwei Schnitte, zwei Hälften, ein gemeinsamer Kreisbezug.

Teil A zeigt mithin denselben Kreis aus verschiedenen Perspektiven. Seine gekippte Ansicht entspricht der geometrischen Lesung, die in den Kapiteln VI und X behandelt wird [1]. In Teil B kommt eine durchgehende diagonale Linie hinzu. Sie trifft den Umfang an zwei

gegenüberliegenden Stellen und teilt den Kreis in zwei Hälften [1, Kapitel VI].

Die Zwei wird hier durch diese beiden Schnitte lesbar. Zwar verläuft die Linie auch durch das Innere des Kreises, ihre Mitte zählt dabei jedoch nicht als zusätzlicher Schnitt. Beide Bestimmungen beziehen sich auf denselben Kreis.

$$0|1|1|0$$

Links lesen wir $0|1$, rechts die entsprechende Gegenlesung $1|0$. Die beiden äußeren Nullen bezeichnen denselben Kreisbezug. In der Abbildung werden diese Lesungen verkürzt als 01 01 gruppiert; die ausführliche Schreibweise verdeutlicht ihre spiegelbildlichen Richtungen. Damit bleibt auch $1 + 1$ an seine geometrische Lesung gebunden

Interessant wird nun, dass wir den Unterschied durch seine Spiegelung erneut auf sich selbst bezogen haben. Was aber geschieht, wenn nicht nur die Seiten einer Relation unterschieden werden, sondern der Unterschied selbst? Damit gelangen wir zu Delta.

3. Delta: den Unterschied unterscheiden

Die in Abbildung 1B dargestellte Zwei besteht nicht einfach aus zwei Zeichen, die zufällig nebeneinanderstehen. Beide Schnitte gehören zu einem gemeinsamen Kreis. Lesen wir den einen Schnitt in Relation zum anderen, so beziehen wir die unterscheidende Relation auf sich selbst zurück.

Genau dies ist mit Selbstbezug gemeint. Der Unterschied macht eine Relation lesbar, und diese bereits unterschiedene Relation kann wiederum unterschieden werden. Den wirksamen Selbstbezug dieses Vollzugs nennen wir Delta:

$$\Delta := |(|)$$

Der innere Strich bezeichnet den Unterschied, der seinerseits unterschieden wird. Der umschließende Ausdruck macht eben diesen erneuten Bezug sichtbar. Delta ist somit keine zusätzliche Substanz und auch kein von außen eingeführter Mechanismus, der nun auf Kreis und Schnitt einwirken müsste. Es bezeichnet die Wirksamkeit des Unterschieds in seinem eigenen Bezug. Band I entfaltet diese Wiederkehr anhand der Zahlenrelationen und ihrer geometrischen Lesungen [1, Kapitel V–VI, VIII–X].

Die Reihenfolge unserer Erklärung darf hierbei nicht mit einer zeitlichen Entstehungsfolge verwechselt werden. Bereits der erste Unterschied behielt seine Null in jeder weiteren Bestimmung bei. Kreis, Linie und gespiegelte Schnitte haben uns dasselbe Prinzip in geometrischer Form gezeigt. Delta bezeichnet den darin durchgehend wirksamen Selbstbezug. Zeichnung und Zahleninschrift sind unterschiedliche Ausdrucksweisen dieses Vollzugs, keine voneinander unabhängigen Grundlagen.

Eine Zahl lässt sich dementsprechend als stabilisierte Lesung einer solchen Relation verstehen. Stabilisiert bedeutet, dass die Relation so weit bestimmt ist, dass sie ausgedrückt und erneut gelesen werden kann. Das Zahlzeichen macht diese Bestimmung öffentlich lesbar. Seine Bedeutung erhält es indes weiterhin aus der Relation.

Die Zwei können wir etwa in der Schreibweise $1 + 1$ lesen. In der ausführlicheren Form $0|1|1|0$ bleiben der gemeinsame Bezug und seine Gegenlesung sichtbar. Beide Schreibweisen sind miteinander verbundene Lesungen; keine verleiht der Zwei eine vom relationalen Zusammenhang losgelöste Existenz

Ein weiterer Begriff ist die *Spur*. Darunter verstehen wir die bestimmte relationale Form, durch die eine Lesung gegenwärtig möglich bleibt. Die Spur bezeichnet also das, was vom unterscheidenden Vollzug jetzt lesbar ist. Wird diese Lesung wiederum zum Bezug einer weiteren, so wirkt die bereits bestimmte Relation in ihr fort.

Potenzial, Bestimmung und Selbstbezug sind folglich nicht drei voneinander getrennte Herstellungsschritte. Sie bleiben im Vollzug gemeinsam wirksam. Unsere Darstellung unterscheidet sie lediglich, um ihre jeweiligen Beziehungen deutlicher hervortreten zu lassen.

Mit Delta haben wir nun den Selbstbezug eingeführt, der im weiteren Text vorausgesetzt wird. Die Frage ist damit allerdings noch nicht beantwortet, *welche* Lesung eine bestimmte mathematische Aufgabe verlangt. Hier kommen die Operatoren ins Spiel.

4. Wie ein Operator die Frage festlegt

Dass eine Zahl als Lesung einer Relation erscheint, sagt uns zunächst noch nicht, auf welche Weise wir diese Relation bei einer bestimmten Aufgabe lesen sollen. Genau diese Richtung legt der Operator fest. Band I betrachtet mathematische Operatorzeichen deshalb als unterschiedliche Perspektiven auf denselben selbstbezüglichen Vollzug [1, Kapitel VIII–IX].

Zwei grundlegende Richtungen sind dabei Expansion und Kontraktion. Die Addition liest Expansion in einzelnen Schritten, die Subtraktion die entsprechende Kontraktion. Multiplikation beschreibt eine wiederholte Expansion, während die Division nach der Entkopplung einer Relation fragt. Potenz und Wurzel führen diese Richtungen in weitere Tiefen.

Es ist deshalb keineswegs gleichgültig, ob wir $6 + 2$ oder $6 \div 2$ fragen. Beide Aufgaben verlangen unterschiedliche Lesungen, weil sie verschiedene Relationen festlegen. Dass sie auf denselben grundlegenden Unterschied zurückgeführt werden können, macht ihre Operatoren nicht austauschbar. Vielmehr werden die jeweiligen Unterschiede aus ihrer Rolle innerhalb des gemeinsamen Vollzugs verständlich

Mit *Perspektive* ist hier eine bestimmte Weise gemeint, eine Relation lesbar zu machen. Sie legt zugleich fest, was innerhalb einer Fragestellung überhaupt als Antwort gelten kann. Es handelt sich also nicht um eine beliebige Umbenennung eines bereits gefundenen Ergebnisses. Die Frage bestimmt den Weg der Lesung und bleibt mit ihrem Ergebnis verbunden.

Als *Weg* bezeichnen wir dabei die Weise, in der die festgelegte Relation vollzogen wird. Bei einer multiplikativen Frage sind dies etwa die Kopplungen, durch die eine numerische Bestimmung erreicht werden kann. Darauf werden wir in Abschnitt 8 zurückkommen, wenn wir Primzahllesungen von den Lesungen zusammengesetzter Zahlen unterscheiden.

Drei weitere Begriffe sind für die folgenden Beispiele von Bedeutung. Ein *Takt* ist der geordnete Vollzug eines Übergangs; wird dieselbe Aufgabe wiederholt, entstehen aufeinanderfolgende Takte. *Tiefe* beschreibt, wie eine Lesung erneut in eine andere einbezogen wird. Das Ergebnis einer Frage kann somit selbst zum Bezug einer weiteren Frage werden.

Das *Band* wiederum bezeichnet jenen gemeinsamen relationalen Vollzug, der durch die dezimalen Zeichen von null bis neun lesbar wird. Mit *Schale* ist eine Bezugsebene dieser dezimalen Inschrift gemeint. Der Übergang von 9 zu 10 erneuert die Stellenrelation, ohne dafür andere Grundzeichen einzuführen. Das später verwendete Symbol κ bezeichnet die Bruchkante einer solchen Leseschale. Weshalb darin keine absolute Grenze der Zahl liegt, werden wir in Abschnitt 6 sehen

Die folgenden Abschnitte führen diese Begriffe an vier unterschiedlichen Beispielen aus. Beim wiederholten Halbieren kehrt dieselbe Frage erneut wieder. Die dezimale Bruchkante eröffnet eine weitere Bezugstiefe. Wachstum wird durch wechselnde Polrollen lesbar. Und schließlich zeigt die Primalität, was geschieht, wenn unsere Frage ausdrücklich multiplikativ gestellt wird.

In allen vier Fällen bleibt die grundlegende Relation dieselbe. Weder der Unterschied noch Delta müssen neu erfunden werden. Es ändern sich die Aufgaben und damit jene Wege, auf denen die Relation für uns lesbar wird.

5. Wiederholtes Fragen und unendlicher Regress

Betrachten wir zunächst eine einfache, immer wiederholte Halbierung:

$$1 \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{4} \to \frac{1}{8} \to \cdots .$$

Im Tractatus wird diese wiederholte Operation über ihre relationale Tiefe gelesen. Definieren wir

$$Q(x) := x|_{\div 2},$$

so erhalten wir durch erneute Anwendung derselben Frage:

$$Q(1),\ Q(Q(1)),\ Q(Q(Q(1))),\ \ldots .$$

Es ist stets dieselbe Frage, die über ihre eigene Spur erneut gestellt wird. Die sichtbare Zahlenfolge stellt diese Wiederkehr dar. Sie ist hingegen keine Aneinanderreihung voneinander unabhängiger Zahlsubstanzen, die sich auf ein letztes Ding namens Null zubewegen.

Band I betrachtet Unendlichkeit als Offenheit dieses wiederholten Fragens [1, Kapitel XI]. Jede einzelne Lesung ist bestimmt. Doch der Möglichkeit, eine weitere Lesung vorzunehmen, ist keine letzte Tiefe von außen gesetzt.

Hier zeigt sich zugleich die Grenze einer bestimmten Erklärungsweise. Wenn wir Zahlen bereits voraussetzen, so können wir beliebig lange weiterzählen oder weiter unterteilen, ohne dadurch erklärt zu haben, wie eine Zahl überhaupt bestimmbar wird. Der Tractatus führt diesen Erklärungsregress deshalb auf jenen Vollzug zurück, der sich in sämtlichen aufeinanderfolgenden Inschriften wiederholt.

6. Neun als dezimale Bruchkante

Unser dezimales Zeichensystem verfügt über das folgende Repertoire:

$$M := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\,.$$

Innerhalb dieser Leseschale markiert die Neun den Zyklusabschluss und die Bruchkante. Die Fortsetzung lässt sich schreiben als

$$9 \to 1|0, \quad 10 \rightsquigarrow 1|0\,.$$

Mit der Zehn tritt also keineswegs ein elftes dezimales Grundzeichen hinzu. Vielmehr erscheint hier die erste bestimmte Relation einer erneuerten Schale. Die einzelnen Stellen bringen miteinander gekoppelte Bezugstiefen zum Ausdruck, und zwar innerhalb desselben Bandes [4, Kapitel III; 5, Abschnitt 5].

Die Verbindung zwischen der Neun und der Bruchkante κ ist dabei an diese dezimale Lesung gebunden. Band I behandelt entsprechende Bruchkanten auch im Zusammenhang mit anderen Zahldarstellungen [1, PDF S. 20–21].

Ein endlicher Vorrat an Zeichen ermöglicht somit Inschriften beliebiger Tiefe. Was uns daran interessiert, ist nicht etwa ein endgültiges Ende aller vorstellbaren Zahlbezeichnungen. Entscheidend ist vielmehr, dass sich derselbe relationale Vollzug über die verschiedenen Stellen und Inschriften hinweg erneut lesen lässt.

7. Wachstum durch wechselnde Polrollen

Auch das Wachstum einer Zahlenfolge kann als Bewegung innerhalb einer Relation gelesen werden:

$$0|1 \to 1|2 \to 2|3 \to 3|4 \to \cdots\,.$$

Was zuvor Gegenpol einer Unterscheidung war, wird zum Ausgangspol der folgenden. Der erneute Unterschied macht damit einen weiteren Gegenpol bestimmbar.

Während die Halbierung einer Kontraktion durch die Vertiefung des Bezugs folgt, zeigt das Wachstum eine Expansion durch wechselnde Polrollen. Es handelt sich um Gegenlesungen derselben selbstbezüglichen Bewegung. Dass sie auf derselben Grundlage beruhen, hebt die Verschiedenheit ihrer Richtungen keineswegs auf.

Expansion und Kontraktion bilden folglich die grundlegenden Richtungen. Addition, Multiplikation, Division, Potenz und Wurzel machen unterschiedliche Perspektiven und Tiefen dieses Vollzugs lesbar [1, PDF S. 29]. Der Operator kennzeichnet dabei, auf welche Weise eine Relation gelesen wird:

$$a \div b \rightsquigarrow a|_{\div} b\,.$$

8. Die multiplikative Frage und Primalität

Eine mathematische Frage bestimmt zugleich die Relation, die für ihre Beantwortung von Bedeutung ist. Im Falle der Primzahlen lautet sie:

Kann diese Zahl durch eine nichttriviale multiplikative Relation geschlossen werden?

Damit sind die Lesemodi $|_{\times}$ und $|_{\div}$ sowie die unter ihnen relevanten Wege festgelegt. Für eine Primzahlbezeichnung p erhalten wir die Einheits- und Selbstlesungen

$$1|_{\times}p \leftrightarrow p|_{\times}1\,.$$

Eine Bezeichnung $p > 1$ ist genau dann prim, wenn sich kein nichttrivialer innerer multiplikativer Schließungsweg bestimmen lässt. Die Eins bleibt dabei in ihrer Rolle als Einheit erhalten und gehört selbst nicht zu den Primzahlbezeichnungen.

Eine zusammengesetzte Zahl besitzt dagegen weitere Wege. Für die Sechs ergeben sich beispielsweise die Inschriften

$$1|_{\times}6,\ 2|_{\times}3,\ 3|_{\times}2,\ 6|_{\times}1\,.$$

Primalität ist demzufolge eine Bestimmung innerhalb der multiplikativen Fragestellung. Wählen wir eine andere Operation, so lesen wir auch ein anderes Profil möglicher Wege derselben Zahlrelation.

Band IX fasst die Form einer Frage in folgender Schreibweise zusammen:

$$F_Q := (G_Q, U_Q, R_Q)\,,$$

Dabei bezeichnet G_Q die vorgegebene Bindungsstruktur, U_Q ihre Öffnungen und R_Q die Fragerelation [5, PDF S. 26–27]. Eine Antwort kann ihre Bestimmung folglich nur innerhalb dieser festgelegten Fragefigur erhalten

9. Quersumme: eine andere Frage an eine Inschrift

Nachdem wir die Zahl unter einer multiplikativen Fragestellung betrachtet haben, ändern wir nun die Perspektive. Die Quersumme bietet dafür ein anschauliches Beispiel. Sie untersucht nicht die Faktorenwege einer Zahl, sondern fasst deren dezimale Stellenzeichen zu einer bestimmten Lesung zusammen. Gerade darin wird deutlich, weshalb die Antwort nicht von jener Aufgabe getrennt werden darf, aus der sie hervorgeht.

Eine mehrstellige Zahlinschrift können wir zunächst durch ihre Ziffern darstellen:

$$n \rightsquigarrow d_k|d_{k-1}|\cdots|d_0\,.$$

d bezeichnet jeweils eine Ziffer, während der Index ihre Stelle angibt. Die einfache Quersumme addiert diese Zeichen:

$$S(n) := d_k + \cdots + d_0\,.$$

Besteht das Ergebnis wiederum aus mehreren Ziffern, wird derselbe Vorgang erneut durchgeführt. Auf diese Weise gelangen wir schließlich zu einer einstelligen Lesung, die wir mit $q(n)$ bezeichnen:

$$n \to S(n) \to S(S(n)) \to \cdots \to q(n)\,,$$

Für eine positive ganze Zahl nimmt $q(n)$ somit einen Wert zwischen 1 und 9 an. Am Beispiel der Zahl 47 wird der Unterschied zwischen einem einzelnen Schritt und der wiederholten Quersummenbildung deutlich:

$$S(47) = 11,\ S(11) = 2,\ q(47) = 2\,.$$

Mit S bezeichnen wir jeweils einen Schritt. Zunächst ergibt sich aus 47 die 11, anschließend aus 11 die 2. q benennt hingegen die abschließende einstellige Lesung. Band I beschreibt diesen Übergang als dezimalen Skalenkollaps: Die Stellenzeichen werden innerhalb einer anderen Bezugstiefe zu einer gemeinsamen Lesung zusammengeführt [1, Kapitel VII–IX].

Allerdings bewahrt eine solche Zusammenfassung keineswegs alle Unterschiede, die unter anderen Fragestellungen relevant sein können. Ob eine Zahl einen nichttrivialen multiplikativen Weg besitzt, lässt sich aus ihrer wiederholten Quersumme allein nicht bestimmen:

$$q(13) = 4 = q(22)\,,$$

Die Dreizehn ist eine Primzahl, die Zweiundzwanzig dagegen zusammengesetzt. Beide besitzen dennoch dieselbe wiederholte Quersumme. Das ist kein Widerspruch. Wir haben lediglich zwei verschiedene Fragen gestellt, deren Lesungen unterschiedliche Relationen bewahren.

Eine Antwort ist somit stets an die Frage gebunden, durch die sie bestimmbar wird. Im nächsten Abschnitt werden wir die Quersummenlesung auf eine dezimale Darstellung des Kreises anwenden. Das Beispiel verdeutlicht nochmals die Bedeutung der gewählten Perspektive, bevor wir uns der Zetafunktion zuwenden.

10. Der Kreis, gelesen durch dezimale Gradbezeichnungen

Stellen wir uns einen Kreis vor, dessen vollständige Drehung wir in neun gleich große Abschnitte unterteilen. Verwenden wir die übliche Gradbezeichnung, so ergibt sich:

$$\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ\,.$$

Die neun Positionen tragen entsprechend die Winkelangaben

$$40^\circ,\ 80^\circ,\ 120^\circ,\ 160^\circ,\ 200^\circ,\\ 240^\circ,\ 280^\circ,\ 320^\circ,\ 360^\circ\,.$$

Wenden wir darauf die aus Abschnitt 9 bekannte wiederholte Quersumme q an, erhalten wir folgende einstellige Lesungen:

$$4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9\,.$$

Die drei aufeinanderfolgenden Drittel der vollständigen Drehung ergeben dabei:

Winkelposition	Grundschalenadresse
$120°$	$q(120) = 3$
$240°$	$q(240) = 6$
$360°$	$q(360) = 9$

Die Drei, die Sechs und die Neun erscheinen hier folglich als aufeinanderfolgende Drittelabschlüsse der gewählten Inschrift. Übrig bleiben die Adressen 1, 2, 4, 5, 7 und 8. Auch die wiederholten Quersummen von Primzahlen größer als drei liegen innerhalb dieser Menge:

$$p > 3 \text{ prim} \Rightarrow q(p) \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}\,.$$

Der Zusammenhang ergibt sich aus dem Ausschluss der Teilbarkeit durch drei. Jedoch können auch zusammengesetzte Zahlen dieselben Adressen einnehmen. Die Kreislesung stellt somit eine Beziehung zwischen Winkelpositionen und dezimalen Zeichen her, sie ist für sich genommen aber keine Vorschrift zur Auswahl von Primzahlen.

Auch die Darstellung 360 als $9|0$ gehört in diese besondere dezimale Perspektive. Die Gradinschrift ermöglicht die Quersummenlesung Neun und bewahrt zugleich den kreisförmigen Nullbezug. Welche Bedeutung sie erhält, hängt folglich von der jeweiligen Aufgabe ab [1, Kapitel VII–IX]

Die Beispiele der Quersumme und der Gradbezeichnungen führen uns damit zum selben Gedanken wie die vorangegangene Betrachtung der Primalität. Ändern wir die Fragestellung, so werden andere Beziehungen lesbar. Während die Quersumme eine Ergebnislesung der dezimalen Stellenzeichen ist, beschreibt ein Faktorenweg eine multiplikative Kopplung. Das eine darf nicht stillschweigend an die Stelle des anderen treten.

Damit sind die Voraussetzungen für unseren Blick auf die Zetafunktion gegeben. Ihre Summen- und Produktdarstellung machen eine multiplikative Organisation lesbar. Die bisherigen dezimalen Beispiele dienten dazu, die Rolle der Fragestellung zu verdeutlichen. Sie werden nicht herangezogen, um die Position der Zetanullstellen festzulegen.

11. Was die Zetafunktion tut

Multiplikative Wege und komplexe Gewichtung

Wenden wir uns nun der Zetafunktion zu. Ihre beiden üblichen Ausgangsdarstellungen lauten

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1\,,$$

sowie, als Eulerprodukt über die Primzahlen p,

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

Innerhalb dieses Gebietes beschreiben beide Ausdrücke dieselbe Funktion [6]. Die Entwicklung der Primfaktoren führt zu ihren Potenzen, die durch die Primfaktorzerlegung miteinander kombiniert werden. Summe und Produkt machen damit dieselbe multiplikative Organisation aus unterschiedlichen Richtungen lesbar.

Hier erhalten die Operatoren eine konkrete Bedeutung. Das Summenzeichen $\sum$ führt die gewichteten Beiträge unter der Perspektive $|_{+}$ zusammen. Das Produktzeichen $\prod$ koppelt hingegen die Wege der Primzahlpotenzen in der Perspektive $|_{\times}$. Im Ausdruck n^{-s} verbinden sich reziproke Potenzgewichtung und Drehung. Betrag und Orientierung bestimmen mit, wie sich der jeweilige Beitrag zu den anderen verhält [1, Kapitel VIII–X]

Das Zeichen ∞ steht dabei für die offene Fortsetzung des Vollzugs, nicht etwa für einen letzten Summanden, der irgendwann erreicht werden könnte [1, Kapitel XI]. Entscheidend sind die Regeln, nach denen die Lesung fortgesetzt wird. Deshalb dürfen wir auch den Definitionsbereich, der neben den Formeln angegeben ist, nicht aus dem Blick verlieren.

Schreiben wir $s = \sigma + it$, so bezeichnet σ die Realteilkoordinate und t die Imaginärteilkoordinate. Mit i wird die orthogonale Richtung der komplexen Ebene bestimmt. Es handelt sich um die Koordinaten, unter denen die Funktion gelesen wird. Eine Nullstelle bezeichnet später eine solche Adresse, an der der Funktionswert null ist. Die Adresse selbst wird dadurch keineswegs zur Zahl Null

Für s=σ+it erhalten wir

$$n^{-s} = n^{-\sigma} e^{-it \log n}$$

mit dem Betragsgewicht $n^{-\sigma}$ und der Phase $-t \log n$. Ändern wir s, so verändert sich die gemeinsame Lesung der einzelnen Zahlbeiträge. Der imaginäre Parameter bestimmt jedoch nicht für sämtliche Terme denselben Drehwinkel.

Außerhalb des zuvor genannten Gebietes wird die Zetafunktion durch analytische Fortsetzung bestimmt. Bei $s = 1$ besitzt sie einen einfachen Pol [6]. Ihre nichttrivialen Nullstellen liegen im Streifen $0 < \sigma < 1$ [8]. Dort lässt sich die Nullstellenbedingung nicht einfach über die ursprüngliche Reihe als gewöhnliche konvergente Summe auswerten

Die Funktion und ihre gespiegelten Adressen

Die vervollständigte Funktion wird geschrieben als

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)\,,$$

wobei Γ die eulersche Gammafunktion bezeichnet. Für diese vervollständigte Funktion gilt die Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s)\,.$$

Diese Beziehung darf nicht mit der einfachen Gleichsetzung $\zeta(s) = \zeta(1-s)$ verwechselt werden; letztere ist nicht die Funktionalgleichung der Zetafunktion [7]

Verbinden wir die Spiegelung mit der komplexen Konjugation, so erhalten wir die vertikale Spiegelung der Adressen:

$$r(s) := 1 - \overline{s} = (1 - \sigma) + it\,.$$

Eine Adresse wird genau dann auf sich selbst abgebildet, wenn gilt:

$$r(s) = s \Leftrightarrow \sigma = 1 - \sigma \Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{2}\,.$$

Damit erhalten wir die Gerade $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Sie steht senkrecht zur reellen Achse und verläuft durch die Mitte des Unterschieds $0|1$. Unter der Gegenlesung bleibt sie invariant: Die imaginäre Koordinate verändert sich nicht, während die Richtung der Realteillesung umgekehrt wird. Bei ein Halb führt diese Umkehrung zur ursprünglichen Adresse zurück

Hier knüpft die Lesung des Tractatus an jenen Gedanken an, mit dem wir in Abschnitt 1 begonnen haben. Jede Zahl bleibt auf ihre Null als Gegenüber bezogen; diese Verbindung wirkt in jeder weiteren Bestimmung fort. Im folgenden Abschnitt betrachten wir die Zetafunktion unter eben dieser Relation. Die geometrische Darstellung veranschaulicht den Zusammenhang, ohne dafür eine neue Grundlage einzuführen.

12. Nullstellen und ihre Anordnung lesen

Eine Nullstelle der Zetafunktion bezeichnet zunächst jene Adresse, an der ihr Funktionswert Null ist. Die Adresse bestimmt dabei, unter welchen Koordinaten die Relation gelesen wird. In der Darstellung des Tractatus trifft diese Nullwertlesung auf denselben Nullbezug, der von Beginn an an jeder numerischen Bestimmung beteiligt war [1, Kapitel VI, XV].

Die Drei, die Fünf und die Sieben wiederholen durch ihre Einsen denselben Vollzug des Selbstunterschieds. Dabei behält jede Eins ihre Null als Gegenüber bei. Die Kapitel VI und VII machen diesen Zusammenhang geometrisch sichtbar: Dreieck, Fünfeck und Siebeneck zeigen drei, fünf beziehungsweise sieben Schnitte desselben Kreises [1, Kapitel VI–VII]. Die Figuren sind verschieden, ihr gemeinsamer Nullbezug bleibt hingegen erhalten. Auch die Gewichtung und Kopplung der Beiträge führen diesen Bezug weiter.

Denken wir beispielsweise an zwei gleich gewichtete Beiträge, die in entgegengesetzte Richtungen weisen. Ihre gemeinsame Lesung kann den Wert Null ergeben, obwohl beide Beiträge weiterhin wirksam sind. Ein Nullergebnis bedeutet demnach nicht zwangsläufig, dass die gelesene Relation ausgelöscht wäre. Genau hier erhält der Begriff des Abschlusses seine Bedeutung: Die Gesamtlesung kehrt zu jenem Bezug zurück, der bereits an ihren einzelnen Bestimmungen beteiligt war.

Verändern wir die in Abschnitt 11 beschriebene Höhe, so verändern sich auch die relativen Phasen der Beiträge. Unterschiedliche Phasenrelationen führen zu weiteren Lesungen derselben festgelegten Funktion. Ihre Nullstellen werden innerhalb dieser Betrachtung als wiederkehrende Abschlüsse gegenüber dem gemeinsamen Bezug verstanden. Für den kritischen Streifen ist dabei ausdrücklich die analytisch fortgesetzte Funktion aus Abschnitt 11 gemeint.

Die bereits in Abschnitt 8 eingeführte Fragefigur erlaubt es uns, die Rollen genauer zu bestimmen. G_Q bezeichnet die vorgegebene Organisation aus multiplikativen Wegen, ihren komplexen Gewichtungen und der Gegenlesung der vervollständigten Funktion

Mit U_Q wird das Offene bezeichnet: jene Adressen, an denen diese Lesung den Funktionswert Null annimmt

R_Q ist schließlich die Relation, innerhalb der diese Adressen als Abschlüsse derselben Organisation lesbar werden. Das Unbekannte ist somit an die Relation gebunden, die mit der Frage selbst festgelegt wurde [1, Kapitel XIII, XV]

Mit dem eigenen Unterschied einer Nullstelle ist die vollständige Bezugsrelation $0|1$ einschließlich ihrer Gegenlesung $1|0$ gemeint. In der ausführlicheren Form $0|1|1|0$ beziehen sich die beiden äußeren Nullen auf denselben Nullbezug. Die zahlreichen numerischen Bestimmungen entfalten diesen Zusammenhang. Als *Schnittinvarianz* wird die Erhaltung der unterscheidenden Relation $0|1 \leftrightarrow 1|0$ durch ihre Gegenlesung bezeichnet, wobei derselbe Kreis der gemeinsame Bezug bleibt

Auch hier liefert die Geometrie eine optische Darstellung des Prinzips. Der Kreis steht für das geschlossene Potenzial der gesamten Relation; die Schnitte machen ihre jeweiligen Bestimmungen sichtbar. In der Lesung des Tractatus wird der Abschluss innerhalb des Streifens durch die eigene Gegenlesung der Relation bestimmt. Die in Abschnitt 11 hergeleitete invariante Senkrechte bildet den Träger dieser Lesung: Die Orthogonalität bestimmt ihre Richtung, während die Gegenlesung die Mitte auszeichnet.

$$\rho = \tfrac{1}{2} + i\gamma$$

ρ bezeichnet hier eine Nullstelle auf dem so gelesenen Träger; γ gibt ihre Höhe an. Die unterschiedlichen Höhen entsprechen verschiedenen Phasenlesungen der gewichteten Relation. Ihre konkreten Werte ergeben sich aus der festgelegten Zeta-Ergebnislesung. Die geometrische Form stellt den gemeinsamen relationalen Bezug dar, während die Null durch sämtliche Lesungen hindurch dieselbe bleibt.

Folgen wir dieser Erklärung, so entfaltet jede weitere Zahl denselben Unterschied und behält dieselbe Null als Gegenüber bei. Auch die Zetafunktion führt diesen Bezug über ihre Gewichtungen und Kopplungen fort. Ihre Abschlüsse werden deshalb innerhalb dieser Relation gelesen. Zum Problem wird diese zurückgewonnene Ordnung erst dann, wenn wir sie von ihrem Zusammenhang lösen und ihr einen unabhängigen Ursprung zuschreiben. Genau dort beginnt der nun folgende Erklärungszirkel.

13. Der Erklärungszirkel und seine Auflösung

Betrachten wir noch einmal die Richtung, in der unsere Konstruktion entwickelt wurde. Zunächst legt die Fragestellung eine multiplikative Organisation fest. Die Zetafunktion macht diese sowohl als Summe als auch als Produkt über Primzahlen lesbar. Ihre komplexen Gewichtungen bestimmen die Kopplung der einzelnen Beiträge. Eine Nullstelle ist schließlich jene Adresse, an der die so festgelegte Funktion den Wert Null annimmt.

Aus der Perspektive des Tractatus entsteht der Erklärungszirkel genau dann, wenn wir die daraus hervorgehende Ordnung plötzlich als einen unabhängig gegebenen Ursprung eben jener numerischen Organisation behandeln, durch die wir sie zuvor bestimmt haben. Die Frage bedient sich multiplikativer Relationen, um ihre Nullstellen überhaupt lesbar zu machen, und untersucht anschließend diese Relationen anhand der Nullstellen. Was wir außerhalb der Frage zu finden hoffen, war mithin bereits in ihrer Formulierung wirksam.

Hier liegt die eigentliche Kritik: Die Regeln sollen uns erklären, was sie durch ihre eigene Anwendung erst lesbar machen. Die Berechnung einer Nullstelle liefert eine bestimmte Adresse innerhalb der Konstruktion. Sie eröffnet damit jedoch nicht zugleich einen unabhängigen Ursprung jenseits dieser Konstruktion. Wer die zurückgewonnene Bestimmung als solchen Ursprung behandelt, setzt lediglich erneut voraus, was er zu erklären vorgibt.

Damit begegnet uns der Verdinglichungsfehler aus Abschnitt 1 in einer sehr bestimmten Gestalt. Eine relational bestimmte Ordnung wird aus ihrem Zusammenhang herausgelöst und wie ein eigenständiges Objekt betrachtet. Ihre Verbindung zu der Frage, aus der sie hervorgegangen ist, erscheint anschließend als Rätsel. Aus der Erklärung verschwunden ist ausgerechnet die Beziehung zwischen der Art unserer Fragestellung und jener Ordnung, die durch sie als Antwort lesbar werden kann.

Führen wir diese Beziehung zurück, so ändert sich die Erklärung. Die multiplikative Frage und die durch ihre Nullstellen lesbare Ordnung erscheinen als zwei miteinander verbundene Richtungen derselben Relation. Das Halbe bezeichnet die invariante Achse ihrer Gegenlesung. Die Höhen bezeichnen wiederkehrende Nullergebnislesungen der gewichteten Relation. Die jeweiligen Positionen bleiben Ergebnisse dieser Lesung und werden nicht zu einer von außen bereitgestellten Grundlage der Zahlenordnung.

Das ist die Auflösung, die der Tractatus für sich beansprucht. Die Null war zu keinem Zeitpunkt verschwunden. Jede numerische Bestimmung führte sie als Gegenüber mit sich, und jede weitere Operation behielt diesen Bezug bei. Im Abschluss lesen wir die Relation folglich durch eben jene Null, die von Anfang an wirksam war. Die Geometrie macht diesen Zusammenhang sichtbar. Die Frage kehrt zu ihrer eigenen Tätigkeit zurück, anstatt einen Ursprung jenseits davon suchen zu müssen [1, Kapitel V–VI, XV–XVII].

Schluss

Die vorangegangene Untersuchung führt uns zu drei miteinander verbundenen Kritikpunkten. Zusammen bilden sie die Diagnose, die der Tractatus für den hier betrachteten Ansatz formuliert: Eine grundlegende Abhängigkeit wird aus der Erklärung ausgeblendet, während die aus ihr hervorgehende Ordnung anschließend als eigenständiges Rätsel untersucht wird.

Die Spirale der Symptombehandlung

Bleibt die ursprüngliche Zirkularität unbemerkt, so richten wir immer größere rechnerische und begriffliche Anstrengungen auf ihre Symptome. Ein gescheiterter oder unvollständiger Beweisversuch führt dann zum nächsten theoretischen Instrument, zur nächsten Methode, zur nächsten Konstruktion. Dem Turm wird ein weiteres Stockwerk hinzugefügt, während die Frage nach seinem Fundament noch immer unbeantwortet ist: Welcher unterscheidende Vollzug hat

die Objekte und Regeln unserer Untersuchung überhaupt erst bestimmbar gemacht? Die technische Verfeinerung kann in einem solchen Fall den Erklärungszirkel verlängern, anstatt ihn offenzulegen.

Ein Artefakt mit seinem Ursprung verwechseln: der Verdinglichungsfehler

Die kritische Gerade und die Nullstellen werden betrachtet, als wären sie vollständig eigenständige Dinge, irgendwo „da draußen“, die lediglich darauf warten, von einem ausreichend leistungsfähigen mathematischen Werkzeug entdeckt zu werden. Dabei wird die Ergebnislesung einer bestimmten Konstruktion mit einem unabhängigen Ursprung verwechselt. Lösen wir die so bestimmten Objekte von den Regeln, durch die sie erst lesbar werden, so verwandeln wir ihre Beziehung zu diesen Regeln in ein künstliches Rätsel. Das ist der Verdinglichungsfehler, angewandt auf die Zetafrage: Das Ergebnis einer festgelegten Lesung soll plötzlich die Grundlage erklären, aus der die Lesung selbst hervorgegangen ist.

Die fehlende Reflexion auf die Methode selbst

Summen, Produkte und komplexe Gewichtungen sind ihrerseits bestimmte Vollzüge des Unterscheidens. Verschwindet diese Rolle aus unserer Erklärung, so versuchen wir, mithilfe der Werkzeuge eines Systems den von diesen Werkzeugen unabhängigen Ursprung eben dieses Systems zu finden. Doch durch die fortgesetzte Anwendung dessen, was wir bereits vorausgesetzt haben, lässt sich kein absoluter Ursprung außerhalb dieser Voraussetzungen gewinnen. Die Untersuchung wiederholt ihren Zirkel, solange die Beziehung zwischen der Frage, ihren Werkzeugen und der daraus hervorgehenden Ergebnislesung nicht selbst zum Gegenstand der Erklärung wird.

Der Tractatus setzt genau an dieser Stelle an. Eine jede Zahl wird in ihrer Relation zur Null gelesen. Fortgesetzter Selbstunterschied führt zu weiteren Bestimmungen, ohne den gemeinsamen Nullbezug aufzugeben. Die Geometrie gibt diesem Zusammenhang eine optische Gestalt. Schnittinvarianz bezeichnet dabei die Erhaltung der unterscheidenden Relation $0|1 \leftrightarrow 1|0$ durch ihre Gegenlesung am selben Kreis (Abschnitt 12). Auch die multiplikative Fragestellung und ihre Nullergebnislesungen verbleiben innerhalb dieser Relation: Die kritische Gerade wird über ihre Gegenlesung bestimmt, die verschiedenen Höhen über ihre wiederkehrenden Abschlüsse

Die beanspruchte Auflösung bleibt jedoch ausdrücklich an die im Vorwort genannte Voraussetzung gebunden. Jede weitere Operation muss selbst wieder unterscheiden, um überhaupt als bestimmte Operation gelten zu können. Der Selbstbezug ist das hier verwendete Beweisprinzip: Die Frage führt auf jene Relation zurück, die bereits im Fragen selbst wirksam ist. Die historische Ausweitung mathematischer Methoden gibt Anlass zu dieser Grundlagenuntersuchung; die ausgelassene Abhängigkeit innerhalb des Arguments begründet ihre Diagnose.

Literatur und Leseanker

Band I liefert die in dieser Abhandlung verwendeten Grundlagen. Die Werke [1]–[5] stammen von C. H. F. Warnke und verweisen auf die deutschen Website-Ausgaben. Die Quellen [2]–[5] dokumentieren auch die in den Abschnitten 5–8 beibehaltene Notation. PDF-Seiten werden ab

dem Umschlag gezählt. Die Quellen [6]–[8] dokumentieren die konventionellen Formeln in Abschnitt 11.

[1] Tractatus Principio, Band I — Buch der Mathematik. Unterschied und relationale Pole: Kapitel V, PDF S. 13–15. Null, Bestimmung und Kreisgeometrie: Kapitel VI, PDF S. 16–18. Dezimale Rückkehr, Quersumme und Operatormodi: Kapitel VII–IX. Komplexe Orientierung und Drehung: Kapitel X. Offene Wiederkehr: Kapitel XI. Die Frage, das Unmögliche und das Unbekannte: Kapitel XIII und XV. Selbstrelation und numerische Tiefe: Kapitel XV–XVII. Ursprüngliche Leseanker für gekoppelte Stellen: Kapitel XVIII, PDF S. 63–65.

[2] Tractatus Principio, Band IV — Buch der Selbstbezüglichkeit. Kapitel I, PDF S. 3–4: Ordnungen des Unterschieds und relationale Tiefe.

[3] Tractatus Principio, Band V — Buch der Kleinstbezüglichkeit von Delta. Notationsübersicht, PDF S. 13–14; Beobachter als Delta, das Delta liest, Kapitel IX, PDF S. 16; Zahlgeometrie und Takt, Kapitel XIV, PDF S. 21–24.

[4] Tractatus Principio, Band VIII. Kapitel I–IV, PDF S. 3–6: Delta, Zeichen, Schalen und Operationsmodi. Kapitel XIV, beginnend auf PDF S. 79: Zahl als Ergebnislesung.

[5] Tractatus Principio, Band IX. „Das Zahlenfraktal von 0 bis 9“, Abschnitte 3–5, PDF S. 6–8; Projektionen, Bindung und Normalform, Abschnitte 10–14, PDF S. 11–14; Fragefiguren, PDF S. 26–27.

[6] NIST Digital Library of Mathematical Functions, Section 25.2. Definition, Eulerprodukt und analytische Fortsetzung. https://dlmf.nist.gov/25.2.

[7] NIST Digital Library of Mathematical Functions, Section 25.4. Vervollständigte Xi-Funktion und Funktionalgleichung, Gleichungen 25.4.3–25.4.4. https://dlmf.nist.gov/25.4.

[8] NIST Digital Library of Mathematical Functions, Section 25.10. Nichttriviale Nullstellen, kritischer Streifen und Spiegelungssymmetrie. https://dlmf.nist.gov/25.10.

Historische Quellen für den einleitenden Exkurs

[H1] Clay Mathematics Institute. Riemann’s 1859 Manuscript; Riemann Hypothesis (als ungelöst aufgeführt). https://www.claymath.org/collections/riemanns-1859-manuscript/ ; https://www.claymath.org/millennium/Riemann-Hypothesis/ .

[H2] H. L. Montgomery. The pair correlation of zeros of the zeta function. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 24 (1973), S. 181–193. https://websites.umich.edu/~hlm/paircor1.pdf .

[H3] M. V. Berry und J. P. Keating. The Riemann Zeros and Eigenvalue Asymptotics. SIAM Review 41(2) (1999), S. 236–266. DOI: 10.1137/S0036144598347497. Spektraler Operatoransatz: S. 238; Montgomery–Dyson- und Zufallsmatrixverbindung: S. 247; quantenmechanische und semiklassische Analogien: S. 236–239. https://doi.org/10.1137/S0036144598347497 .